6ο 29/11/2019

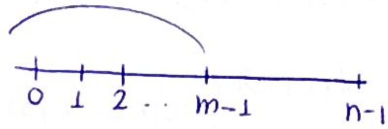
Θεωρία Συνόλων

$n \in \mathbb{N}$

$\alpha \subseteq n \Rightarrow \alpha = n$ ή $\alpha \subsetneq n$ (γνήσιο υποσύνολο)

$\Downarrow$

$\exists m \in n : \alpha \cong m$



Αν $f: n \to n$ 1-1

$n \in \mathbb{N} \Rightarrow$ <u>f επί</u>

<u>Αποδ</u> Θεωρώ όλους τους φυσικούς $A = \left\{ n \in \mathbb{N} \left\{ \begin{array}{l} \forall f: n \to n \text{ 1-1} \\ \Rightarrow f \text{ επί} \end{array} \right\} \right\} \subseteq \mathbb{N}$

το $\emptyset = 0 \in A$

$\{0\} = 0 \cup \{0\} = 0^+ = 1$, f 1-1 $\Rightarrow f: \{0\} \xrightarrow[1-1]{} \{0\}$ άρα και f επί

A επαγωγικό

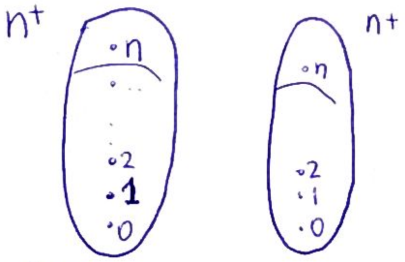
$0 \in A$, αν $n \in A \overset{\text{ΘΔΟ}}{\Rightarrow} \boxed{n^+ \in A}$

Έστω τυχαία $f: n^+ = n \cup \{n\} \to n^+$ 1-1

ΘΔΟ f επί.

Περιπτώσεις $\longrightarrow$ 1) ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ $f[n] \subseteq n$ Κοιτώ τι κάνουν οι προηγούμενοι αριθμοί

(Σίγουρα $f[n] \subseteq n^+$)



$f: n^+ \to n^+$
$f[n] \subseteq n$
$f/_n : n \to \underset{\subseteq n}{f[n]}$
περιορ.
$f/_n : n \to n$

Εφόσον $f: n^+ \to n^+$ 1-1 $\Rightarrow f/n$ 1-1

$n \in A$, $\xrightarrow[\text{υποθ}]{\text{Επαγ}}$ f επί, $f[n] = n$

$f(n) \subset n^+ = n \cup \{n\}$

$n \in n^+ \Longrightarrow$ $f(n) \in n$ (1)   Αποκλείω την (1) διότι χαλάει την 1-1.

$f(n) = n$ (2)   Δέχομαι την (2) διότι διατ. την 1-1.

(1) Αν $f(n) \in n$ τότε $f(n) = \lambda \in n = f[n] \Longrightarrow \exists\, k \in n : f(k) = \lambda$

Άρα έχαμε ότι $\left.\begin{matrix} f(k) = \lambda \\ f(n) = \lambda \end{matrix}\right\}$ όμως $k \neq n$, άρα χαλάει όπως είπαμε το 1-1.

$\left(\text{αν } k = n,\ k \in n \Rightarrow n \in n\right\} \rightarrow$ Άτοπο το n δεν μπορεί να ανήκει στον εαυτό του.

$k \in n^+$

$n \in n^+$

$\Rightarrow f$ όχι 1-1.

Άρα $f: n^+ \to n^+$

Για το επί.

$$f[n^+] = f[\overset{\downarrow \text{Ένωση συνόλων}}{n^+ \cup \{n\}}]$$

$\underset{n^+}{\parallel}$ Ένωση δύο συνόλων από Θεμελιώδης.

$$= f[n] \cup f[\{n\}]$$

$$= f[n] \cup \{\underset{n}{\underset{\parallel}{f(n)}}\} = n \cup \{n\} = n^+$$

2) Περίπτωση

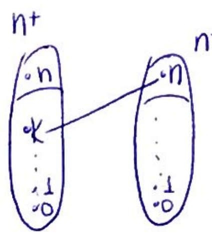
$\underbrace{f[n] \not\subset n}$ όμως $f(n) \subseteq n^+$

$\Downarrow$ (λείπει από το δεύτερο κυκλάκι το n)

Από 1) $\Rightarrow \exists\, k \in \underset{\subseteq n^+}{f[n]},\ k \notin n \Rightarrow k \in n^+ = n \cup \{n\}$

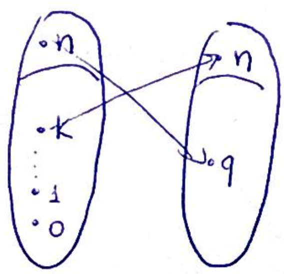
$k = n$

Άρα $n \in f[n]$



Αφού f 1-1, $f(n) \neq n$, αλλά $f(n) \subset n^+ = n \cup \{n\}$

$\Rightarrow f(n) \in n$, $f(n) = q$



Θέλω να δείξω ότι

$$\boxed{f[n^+]=n^+}$$

ΠΡΟΣΟΧΗ

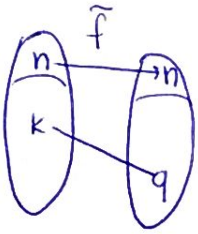
$f/n : n \to f[n] \subseteq n^+ = n\cup\{n\}$

$\in n$

$\not\to n$

Δεν ισχύει.

Ορίζω μια νέα $\tilde{f}: n^+ \to n^+$



$\tilde{f}(n)=n$ / $\tilde{f}(x)=f(x)$ όταν $x\neq k, n$

$\tilde{f}(k)=q$ / $x\in n^+$.

Αποδεικνύω ότι $\tilde{f}: n^+ \to n^+$ είναι 1-1. Αποδ

Περιορίζω $\tilde{f}/n : n \to n$, $(\tilde{f}[n]\subseteq n)$

$\tilde{f}(n)=n$

Επίσης 1-1, $n\in A \Rightarrow \tilde{f}/n$: επί, $\tilde{f}[n]=n \Rightarrow \tilde{f}[n^+]=n^+$ (1)

Η $\tilde{f}$ αλλάζει τις δύο τιμές (k και q) και αφήνει τις άλλες ανάλλοιωτες. $\to$ άρα μπορώ να ισχυριστώ $f[n^+]=\tilde{f}[n^+]$

Φανερά $f[n^+]=\underset{\overset{\parallel}{n^+}}{\tilde{f}[n^+]} \Rightarrow f[n^+]=n^+$

(Άσκηση)

$\tilde{f}: n^+ \to n^+$

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x\neq k,n \\ q & x=k \\ n & x=n \end{cases}$$

$\tilde{f}: 1\text{-}1$, $x \neq y \Rightarrow \tilde{f}(x) \neq \tilde{f}(y)$

$x, y \in n^+$

1) Αν $x, y \in n^+ \setminus \{k, n\}$ τότε $\tilde{f}(x) = f(x)$ και $\tilde{f}(y) = f(y)$

$x \neq y \xrightarrow[1\text{-}1]{\tilde{f}} \underset{1\text{-}1}{f}$ τότε $f(x) \neq f(y)$

2) Αν $x, y \in \{k, n\}$ (Άσκηση)

3) Αν $x \in \{k, n\}$, $y \in n^+ \setminus \{k, n\}$ τότε $\tilde{f}(x) = q$ (αν $x = k$)

Αν το $y \neq \{k, n\}$ τότε θα πηγαίνει κάπου εκτός αυτών των δύο k και n.

$\tilde{f}(y) = f(y)$?

$y \neq k \xRightarrow{f\ 1\text{-}1} f(y) \neq f(k) = q$

$\tilde{f}(y) \neq \tilde{f}(x)$

4) $x \in n^+ \setminus \{k, n\}$, $y \in \{k, n\}$ όμοια...

<u>Εφαρμογή</u> Αν $f: A \to A$, A πεπερασμένο ($\neq \phi$) , f 1-1 τότε f επί.

$\underbrace{A \cong n}$, για κάποιο $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\phi"'] & A \arrow[d, "\phi"] \\ n \arrow[r, "g"'] \arrow[u, bend right, "\phi^{-1}"'] & n \end{tikzcd}$$

, λόγω του $A \cong n \Rightarrow \exists\, \phi : A \xrightarrow[\text{επί}]{1\text{-}1} n$

Ορίζω μια συν/ση $g: n \to n$ ως εξής:

$g = \phi \circ f \circ \phi^{-1} : n \to n$

$\boxed{\text{Θέλω το 1-1 και επί της } f \text{ να σχετίζονται με τα 1-1 και επί της } g}$

$g(k) = \phi(f(\phi^{-1}(k)))$ ως σύνθεση συν/σεων $\}$ $g: 1\text{-}1$ $n \to n$

g επί $\Rightarrow f$ επί

Πρέπει να δω: Έστω $y \in A$, θα βρούμε $x \in A: f(x) = y$

$\phi(y) \in n$, $\underline{g \text{ επί}}$ $\exists k \in n : g(k) = \phi(y) \to$ (38)

$$\begin{array}{ccc} \underset{x}{A} & \xrightarrow{f} & \underset{y}{A} \\ \phi \downarrow \uparrow \phi^{-1} & & \downarrow \phi \\ \underset{k}{n} & \xrightarrow{g} & \underset{\phi(y)}{n} \end{array}$$

$x = \phi^{-1}(k)$

Αποδ ότι $f(x) = y \Leftarrow\Rightarrow f(x) = f(\phi^{-1}(k)) \Rightarrow$

$\phi(f(x)) = \underbrace{\phi(f(\phi^{-1}(k)))}$

$= g(k) = \phi(y) \Rightarrow$

$\phi(f(x)) = \phi(y) \xrightarrow[1-1]{\phi} \boxed{f(x) = y}$

Άρα f επί.

A όχι πεπερασμένο $\overset{op}{\Longleftrightarrow}$ A άπειρο

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: $\nexists$ α πεπερ σύνολο $\cong$ με γνήσιο υποσύνολο του

i) Αν $\alpha \cong \beta \subsetneq \alpha \overset{(1)}{\Longrightarrow} \exists\, f\, \alpha \xrightarrow[\text{επί}]{1-1} \beta \subsetneq \alpha$.

(1) $f[\alpha] = \beta$

$f.\ \alpha \xrightarrow{1-1} \alpha$

$f[\alpha] = \beta \subsetneq \alpha$

$f[\alpha] \subsetneq \alpha$, f όχι επί

ii) $\alpha \cong \beta$

β άπειρο $\Rightarrow$ άπειρο

iii) $\alpha \cong \beta$, $\beta \subsetneq \alpha \Rightarrow \alpha$ άπειρο.

—— o ——

Γιατί η απεικόνιση είναι επί?

Έστω $\omega = \mathbb{N}$, είναι άπειρο. Αρκεί νδο. $\mathbb{N} \setminus \{0\} \cong \mathbb{N}$

καθε μη μηδενικό είναι επόμενος

$\phi: \mathbb{N} \to \mathbb{N} \setminus \{0\}$, καλά ορισμ., ϕ 1-1, $\phi(x) = \phi(y) \Rightarrow x^+ = y^+ \Rightarrow x = y$

$\phi(x) = x^+ \neq 0 = \emptyset$ το $x \in x^+$

$\forall x \in \mathbb{N}$

$\left\{ \forall k \neq 0 \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} \Rightarrow \exists\, n \in \mathbb{N} : \underset{\phi(n)}{\overset{\|}{n^+}} = k \right\}$

$\mathbb{N} \cong \mathbb{N} \setminus \{0\} \Rightarrow \mathbb{N}$ όχι πεπερ.

ΘΕΩΡΗΜΑ (αναδρομικότητας) (Αποδ. με Επαγωγή : Δεν θα την δούμε) (ΕΚΤΟΣ)

Δίνεται $A \neq \emptyset$, $x_0 \in A$ και συνάρτηση $f: A \to A$. $\Longrightarrow \exists$ μοναδική $g: \mathbb{N} \to A$, $g(0) = x_0$. ← που εξασφαλίζει όλες τις υπολοιπες (*)

$g(n^+) = f(g(n))$ όπου $g(n^+)$ είναι η x_{n+1}, $g(n)$ είναι η x_n. $\forall n \in \mathbb{N}$.

{Προσπαθώ να φτιάξω ακολουθίες μέσα στο A.}

$x_0 \in A$

$x_1 = f(x_0)$

$x_2 = f(x_1)$

$\vdots$

όπου g: (*)

$g(0) = x_0$

$g(1) = f(x_0)$

$g(2) = f(f(x_0))$

$\vdots$

Μοναδικότητα

$\exists h: \mathbb{N} \to A$, $h(0) = x_0$

$h(n^+) = f(h(n))$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$g(0) = x_0$

$g(n^+) = f(g(n))$ $\forall n \in \mathbb{N}$

ΔΟ $h = g$ $(h, g: \mathbb{N} \to A)$

αρκεί $h(n) = g(n)$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Αν θέσω $A = \{n \in \mathbb{N} : h(n) = g(n)\}$

$0 \in A$, $n \in A \Rightarrow h(n) = g(n)$

$f(h(n)) = f(g(n)) \Rightarrow h(n^+) = g(n^+) \Rightarrow n^+ \in A$

Το πεδίο τιμών της g : $g[\mathbb{N}] = \{x_0, x_1, x_2, \dots\} = \{g(n) : n \in \mathbb{N}\}$

{Το επόμενο προκύπτει από το προηγούμενο}

Θέλουμε να ορίσουμε το $m+n$, με $m, n \in \mathbb{N}$ (Επίλυση με αναδρομή)

$m + n$ → αναδρομή (n).

$m + 0 = m$

$m + (n^+) = (m+n)^+$

↑ Επόμενο το n

$m + (n+1) = (m+n) + 1$ ✓ επόμενο (μεταφέρομαι προς τα δεξιά.)

Αναδρομή — Δεν τα λαμβάνω πολύ υπόψη

> Μια απλή ακολουθία $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ θα είναι η $x(n) = n$.
> $\mathbb{N} = A$

Σταθεροποιώ $m \in \mathbb{N}$, ορίζω $S_m : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$$S_m(0) = m \quad (1)$$

$$S_m(n^+) = \left[S_m(n)\right]^+ \quad (2)$$

Ορίζω ως $m+n = S_m(n)$

$$m+n^+ = S_m(n^+) = \left[S_m(n)\right]^+ = (m+n)^+$$

$\exists\, S_m : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \ \forall m \in \mathbb{N}$

Εφόσον έχω ορίσει ως $m+n = S_m(n)$ τότε:

$$m+0 = S_m(0) = m$$

$$\underbrace{m+1}_{\text{Επόμενο του } m} = S_m(1) = \left[S_m(0)\right]^+ = m^+$$

$$m+\underset{\uparrow}{2} = m+1^+ = S_m(1^+) = \left[S_m(1)\right]^+ = (m^+)^+$$

Πως να το ορίσω?

$2 = 1^+$

κλπ

> Πως ορίζονται
> 0
> 1
> $2 = 1^+$
> $3 = 2^+ = (1^+)^+$

έχουν νόημα

$$m+(n+k) = (m+n)+k \quad \forall m\, \forall n\, \forall k \text{ φυσικός}$$

$$m+n = n+m$$

σταθεροποιώ τα m, n και μεταβάλλω κάθε φορά το k.

$$A = \{k \in \mathbb{N} : m+(n+k) = (m+n)+k\}$$

$0 \in A \quad m+(n+0) = (m+n)+0$

$\qquad\quad m+n = m+n$

Επαγωγικό

για $k \in A \Rightarrow k^+ \in A$ (Δηλ. στην θέση του k, βάζω το k^+.)

Θνδο $\boxed{m+(n+\overset{k\in A}{\Downarrow}k) = (m+n)+k}$

$$m+\cancel{(n+k^+)} = m+\cancel{S_n(k^+)} \quad \cancel{S_m(\lambda) = m+\lambda}$$

$$= m+\cancel{[\underbrace{S_n(k)}_{\lambda}]^+} \ \cancel{m+\lambda^+}$$

$$S_m(n^+) = [S_m(n)]^+$$

$$\Updownarrow$$

$$(m+n^+) = (m+n)^+$$

$\Rightarrow$ $m+(n+k) = (m+n)+k$

Αποδ

$$m+(n+k^+) = m+\underbrace{(n+k)}_{\lambda}{}^+ = m+\lambda^+ = (m+\lambda)^+ = [m+(n+k)]^+ \underset{KCA}{=} [(m+n)+k]^+ = (m+n)+k^+$$

(Βιβλιο Κάλφα)

Βασική ιδιότητα πρόσθεσης $m+n^+ = (m+n)^+$ προσεταιριστική ιδιότητα

Πολλ/σμός $m\cdot 0 = m$

$$m\cdot \underset{\underset{n+1}{\shortparallel}}{n^+} = mn+m$$

Άρα έχουμε ορίσει έως τώρα $+, \cdot$

$$m\cdot 1 = m(\underbrace{0^+}_{0+1}) = m\cdot 0+m = m+0 = m$$

$m(n+k) = mn+mk$

$m\cdot n = n\cdot m$

Δύναμη m^n Ορίζουμε με αναδρομή $n\in\mathbb{N}$ για σταθ. $m\in\mathbb{N}$

$m^0 = 1$

$m^{n^+} = m^n\cdot m$ (n^+: $n+1$)

Διάταξη (στους φυσικούς)

$(\mathbb{N}, \leq)$

x   y

$x \leq y \iff x \in y$ ή $x = y \iff x \in y$ ή $x \in \{y\}$

$x, y \in \mathbb{N}$ $\iff x \in y \cup \{y\} = y^+$

$(E, \leq)$

$(\leq) \subseteq E \times E$

σχέση

$x \leq x \quad \forall x \in \mathbb{N}$

συμμετρικότητα

$x \leq y,\ y \leq x \Rightarrow x = y \quad \forall x$

$x \leq y,\ y \leq z \Rightarrow x \leq z \quad \forall x, y, z$

Πχ αν $x=3$ $y=5$

Αν $y=5 \rightsquigarrow 5=\{0,1,2,3,4\}$ άρα το $x \in y$ διότι $x=3$ και το $3 \in 5 = \{0,1,2,3,4\}$

1) $x \leq x$, φανερά $\forall x \in \mathbb{N}$, αφού $x = x$

2) $\left.\begin{array}{l} x \leq y^{(1)} \text{ και } y \leq x^{(2)} \\ x, y \in \mathbb{N} \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{νδο}} x = y$

(1), (2) αλλά $x \neq y$

$\hookrightarrow x \in y$ ή $(x = y) \Rightarrow x \in y$

$\hookrightarrow y \in x$ ή $(\cancel{y = x}) \Rightarrow y \in x$

άτοπο διότι $x \neq y$

$\Rightarrow x = y$

3) $x \leq y,\ y \leq z \Rightarrow x \leq z$

i) $x = y$ ii) $y = z$ iii) $x \leq y$ $x \neq y$ $\rightarrow x \in y$, $y \leq z$ $x \neq z$ $\rightarrow y \in z \Rightarrow$ $\left.\begin{array}{l} x \in y \\ y \leq z \end{array}\right\} x \in z \Rightarrow x < z$ (όχι ίσο διότι $z \in z$ δεν υφίσταται)

Από Λήμμα (αν φυσικός ανήκει σε φυσικό ($k \in n$) τότε ($k \subseteq n$).

ΠΡΟΣΟΧΗ

$\boxed{x \neq y \rightsquigarrow x \in y}$

Στόχος

$(\mathbb{N}, \leq)$ ολικά διατεταγμένο σύνολο
γραμμικά

Θδο: $\forall x, y \in \mathbb{N}$ ισχύει είτε $x \in y$ (ακριβώς μια)
$x = y$
$y \in x$

ΛΗΜΜΑ

Αν $m,n \in \mathbb{N}$, $m \in n \Rightarrow m^+ \in n^+$

$$(m<n) \Rightarrow (m^+ < n^+)$$

$m \in n \Rightarrow m^+ \in n^+$, Αποδ με επαγωγή στο n

$$A = \{ n \in \mathbb{N} : \text{αν } m \in n \Rightarrow m^+ \in n^+ \}$$

θδο A επαγωγικό.

$0 \in A$ τετριμμένα αφού $0 = \emptyset$

Εαν $n \in A \Rightarrow n^+ \in A$

Αποδ αρκεί νδο αν $m \in n^+ \Rightarrow m^+ \in (n^+)^+$

Έστω $m \in n^+ = n \cup \{n\}$

$\Rightarrow$ $m \in n \Rightarrow n \in A \Rightarrow m^+ \in n^+ \subseteq n^+ \cup \{n^+\} = (n^+)^+$

$m = n \Rightarrow$ φανερό $\Rightarrow m^+ = n^+ \in \{n^+\} \cup n^+ = (n^+)^+$

Δείξαμε ότι $m \in n^+ \Rightarrow m^+ \in (n^+)^+ \Rightarrow n^+ \in A$

ΠΡΟΤΑΣΗ $(\mathbb{N}, \leq)$ ολικά διατεταγμένο σύνολο

$\forall m,n \in \mathbb{N} \Rightarrow \boxed{m \in n}$ ή $\boxed{n = m}$ ή $\boxed{n \in m}$

Αποδ

Κάνω επαγωγή σε ένα από τους m, n.

$\forall n \in \mathbb{N}, [\forall m \in \mathbb{N}$, ο m συγκρίσιμος με τον $n]$

$$A = \{ n \in \mathbb{N} : \forall m \in \mathbb{N}, m \text{ συγκρίσιμος με το } n \} \subseteq \mathbb{N}$$

$0 \in A$ φανερό διότι κάθε φυσικός $m \in \mathbb{N}$ αριθμός συγκρ με 0. $\boxed{0 \leq m}$ — $m = 0$ — $m \neq 0 \Rightarrow 0 \in m \Rightarrow 0 < m$

Αν $n \in A \Rightarrow n^+ \in A$

Αρκεί νδο n^+ συγκρ με όλους τους $m \in \mathbb{N}$

$\longrightarrow$

Έστω $m \in \mathbb{N}$ $(n \in A)$

- $n \in m \implies \underline{n \in m}$ Από Λήμμα $n^+ \in m^+ = m \cup \{m\}$ $\begin{cases} \underline{n^+ = m} \\ n^+ \in m \Rightarrow \underline{n^+ < m} \end{cases}$
- $n = m \implies m \in \{n\} \subseteq n \cup \{n\} = n^+ \Rightarrow m \in n^+. \Rightarrow \underline{m < n^+}$
- $m \in n \implies$ αφού $n \subseteq n^+ \Rightarrow m \in n^+ \Rightarrow \underline{m < n^+}$

$\implies$ A επαγωγικό $\Rightarrow$ $A = \mathbb{N} \Rightarrow (\mathbb{N}, \leq)$ ολική.